NOTIZEN

Bemerkungen zur Berechnung des anharmonischen Oszillators mittels funktionaler Integration

G. Röpke

Institut für theoretische Physik der Technischen Universität Dresden

(Z. Naturforsch. **23 a**, 610 [1968]; eingegangen am 13. Dezember 1967)

1.

In [1] wurde eine Reihe (V) angegeben, die die Abhängigkeit des funktionalen Integrals vom Gitterabstand ε beseitigt. Sicher gibt es noch andere, die das gleiche leisten, und die darüber hinaus ein besseres Konvergenzverhalten zeigen. In Abschnitt 4 wurde $\chi(0)$ mit einer Reihe umgeformt, das Ergebnis zeigte keine zumindest asymptotische Konvergenz gegen den exakten Wert 0,2873 $1/\sqrt[3]{\mu\lambda}$. Besser geeignet ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i\,\varepsilon\,\lambda}^{\,\nu}} \left(\frac{\mu}{i\,\varepsilon}\right)^{\nu-1} \left(1+\frac{\mu}{\sqrt{i^3\,\varepsilon^3\,\lambda}}\right)^{2/3-\nu} A_\nu\,, \tag{1}$$

welche im $\lim \varepsilon \to 0$

$$\chi(0) = (0{,}338 - 0{,}023 - 0{,}021 - 0{,}008 - 0{,}001 + 0{,}001 + 0{,}001 + \ldots)\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\,\lambda}} \tag{2}$$

liefert. Außerdem ist das analytische Verhalten in der komplexen ε-Ebene besser. Mit einer analogen Reihe läßt sich auch die Größe α (IV) behandeln.

2.

Eine weitere Freiheit besteht darin, etwa μ durch $c\,\mu$ zu ersetzen, wodurch das Konvergenzverhalten der Reihe (2) wesentlich verändert werden kann. Zweckmäßig ist eine Bestimmung von c aus dem asymptotischen Wert des Quotienten der Reihe, die durch den Ansatz (1) umgeformt werden soll, oder aus der Bedingung, daß bei endlich vielen Gliedern der Reihe das letzte A_ν verschwinden soll. Als Beispiel ergeben schon die ersten beiden Glieder der Reihe für α (IV):

$$\alpha = 0{,}338\,\frac{\sqrt{i\,\varepsilon}}{\sqrt{\lambda}} + 0{,}0927\,\frac{\mu}{i\,\varepsilon\,\lambda} \mp \ldots = 0{,}338\,\frac{\sqrt{i\,\varepsilon}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \left(1 + 0{,}822\,\frac{\mu}{\sqrt{i^3\,\varepsilon^3\,\lambda}}\right)^{1/3} \pm \ldots,$$

$\lim \varepsilon \to 0$:

$$\alpha = 0{,}338\,\sqrt[3]{0{,}822}\,\sqrt[3]{\frac{\mu}{\lambda^2}} = 0{,}316\,\sqrt[3]{\frac{\mu}{\lambda^2}}\,;$$

$$\omega_{10} \approx \sqrt[3]{\frac{1}{\mu\,\alpha}} = 1{,}78\,\sqrt[3]{\frac{\lambda}{\mu^2}}\,.$$

3.

Man kann außerdem die Glieder mit positiven ε-Potenzen verändern, da sie im $\lim \varepsilon \to 0$ nichts beitragen. In [2] wird untersucht, ob man nach Streichen dieser Glieder bei der Behandlung ε-abhängiger Reihen zum gleichen Ergebnis gelangt, dort Formel (24), (36) und (42). In der Tat läßt sich zeigen, daß der Koeffizient von A_1 immer stärker oszilliert, der Reihe läßt sich nicht aus endlich vielen Gliedern ein Wert zuordnen. Man kann dieses divergente Verhalten an den Gliedern $2^n - 1$ zeigen. Es ist hier besser, erst die gesamte Reihe umzuformen und dann den $\lim \varepsilon \to 0$ durchzuführen. Letztlich entscheidend für die Brauchbarkeit einer partiellen Aufsummation zur Beseitigung der ε-Abhängigkeit ist das Verhalten der dabei entstehenden Reihe, ob sie nämlich in den berechneten Gliedern eine rasche, zumindest asymptotische, Konvergenz zeigt.

[1] G. Röpke, Z. Naturforsch. **22 a**, 860 [1967].

[2] M. Hoffmann, Z. Naturforsch. **22 a**, 1198 [1967].

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung") beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.